ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

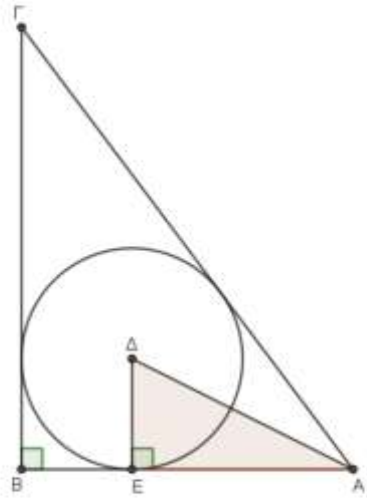
Τέσσερα άτομα έχουν ηλικίες οι οποίες είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με 7920. Ποιο θα είναι το γινόμενο των ηλικιών τους μετά από 5 χρόνια;

Πρόβλημα 2

(α) Πόσα διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα υπάρχουν με περίμετρο 31 τα οποία έχουν ακέραια μήκη πλευρών;

(β) Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $\mathrm{A} = 2019^{2018} + 2018^{2019}$

Πρόβλημα 3



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $\left(\hat{B} = 90^{\circ}\right)$ το οποίο έχει πλευρές με μήκη $ΑΒ = 3$, $ΒΓ = 4$ και $ΑΓ = 5$. Οι πλευρές του τριγώνου εφάπτονται κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $Δ$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η $ΔΕ$ είναι κάθετη στην πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο επαφής του κύκλου με την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$

Πρόβλημα 4

Ένας πελάτης πήρε σε μια τράπεζα 2018 κέρματα του ενός ευρώ και ζήτησε από τον ταμία της τράπεζας να του βάλει σε έντεκα σακούλια όλο το ποσό με μίαν απαίτηση: οποιοδήποτε ακέραιο ποσό ζητηθεί από το €1 ως το €2018, να μπορεί να το σχηματίσει δίνοντας κάποιο ή κάποια από τα σακούλια, με τα λεφτά που θα έχουν τοποθετηθεί, χωρίς να τα ανοίγει. Να βρείτε τρόπο, ώστε ο ταμίας να εκπληρώσει την επιθυμία του πελάτη.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Ο Γιάννης πώλησε το αυτοκίνητο του στον Κώστα με έκπτωση 10%. Στη συνέχεια ο Κώστας το πώλησε στον Αντρέα με έκπτωση 20%. Ο Αντρέας το πώλησε στον Δημήτρη με κέρδος 20% και ο Δημήτρης αφού το έφτιαξε λίγο και το περιποιήθηκε (χωρίς πρόσθετο κόστος) άρεσε στον Γιάννη που το είχε αρχικά και του το ζήτησε να το αγοράσει πίσω. Ο Δημήτρης το πώλησε τελικά στον Γιάννη προς €9504, έχοντας έτσι κέρδος 10%.

Ποια ήταν η αρχική αξία του αυτοκινήτου;

Πρόβλημα 2

(α) Να βρείτε 3 διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς ώστε κάθε ένας από αυτούς να διαιρεί το άθροισμα τους.

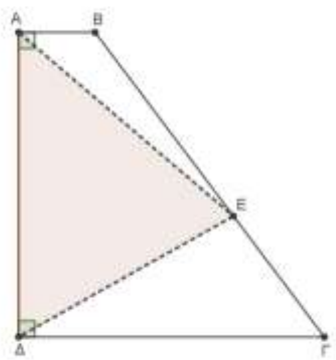
(β) Να βρείτε 8 διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς ώστε κάθε ένας από αυτούς να διαιρεί το άθροισμα τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 3

Δίνεται το ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $AB || ΓΔ$ και $\hat{A} = \hat{Δ} = 90^\circ$. Δίνεται επίσης ότι $(AB) = 4, (AΔ) = (ΔΓ) = 16$ και $(BE) = 12$.

(α) Να δείξετε ότι $(ΓE) = 8$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $(AΔE)$.



Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους οι οποίοι είναι ίσοι με 25 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

<u>Ημερομηνία</u>: 08/12/2018 *<u>Ώρα Εξέτασης</u>: 09:30-12:30*

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ:</u>

1. Να λύσετε <u>όλα</u> τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

Πρόβλημα 1

(α) Να δείξετε ότι ο $A=\sqrt{342225}+\sqrt[3]{74088}$ είναι φυσικός αριθμός τον οποίο και να υπολογίσετε.

(β) Να δείξετε ότι ο αριθμός $B=\sqrt{17-6\sqrt{8}}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\kappa+\lambda\sqrt{2}$ για κατάλληλες τιμές ακεραίων κ,λ.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) έτσι ώστε να ισχύει:

$$x^2-2xy-8y^2=40$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και σημεία $Ε,Ζ$ στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα ώστε $(ΑΕ)=3(ΕΒ)$ και $(ΒΖ)=(ΓΖ)$. Να δείξετε ότι η $ΔΖ$ διχοτομεί την γωνία $ΕΔΓ$.

Πρόβλημα 4

(α) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}=\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2018\sqrt{2019}+2019\sqrt{2018}}$$

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2017\sqrt{2019}+2019\sqrt{2017}}$$

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018** **Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ** *Ημερομηνία: 08/12/2018* *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Τέσσερα άτομα έχουν ηλικίες οι οποίες είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με 7920. Ποιο θα είναι το γινόμενο των ηλικιών τους μετά από 5 χρόνια;

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 10 και με το 9.

$$7920 = 9 \cdot 10 \cdot 88 = 9 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 11 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$$

Δηλαδή το 7920 γράφεται ως γινόμενο των 4 διαδοχικών αριθμών: $8, 9, 10$ και 11. Μετά από 5 χρόνια το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι:

$$(8+5)(9+5)(10+5)(11+5) = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = \mathbf{43680}$$

Πρόβλημα 2

(α) Πόσα διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα υπάρχουν με περίμετρο 31 τα οποία έχουν ακέραια μήκη πλευρών;

(β) Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $\mathrm{A} = 2019^{2018} + 2018^{2019}$

Προτεινόμενη-Λύση

(α) Θα πρέπει να να προσέξουμε ότι για τις πλευρές α, β, γ πρέπει να ισχύει: $\alpha < \beta + \gamma$ για κάθε επιλογή για το μήκος της πλευράς α.

Τα ζητούμενα τρίγωνα είναι $\mathbf{8}$ και τα παρουσιάζουμε σε τριάδες (α, β, γ):

$$(1{,}15{,}15), (3{,}14{,}14), (5{,}13{,}13), (7{,}12{,}12), (9{,}11{,}11)\ , (11{,}10{,}10), (13{,}9{,}9), (15{,}8{,}8)$$

Για παράδειγμα το τρίγωνο με πλευρές: 17,7,7 δεν είναι κατασκευάσιμο γιατί $\alpha > \beta + \gamma$, ενώ τα τρίγωνα (1,15,15) και (15,1,15) τα θεωρούμε ότι δεν είναι διαφορετικά.

(β) Έστω ο αριθμός $\mathrm{A} = 2019^{2018} + 2018^{2019}$.

✓ Για τον αριθμό $\mathrm{A}_1 = 2019^{2018}$ το τελευταίο ψηφίο διαδοχικών δυνάμεων του με εκθέτη 1,2,3,4, … κτλ είναι : 9, 1, 9, 1, 9, 1, … Δηλαδή σε περιττό εκθέτη το τελευταίο ψηφίο είναι 9, ενώ με άρτιο εκθέτη το τελευταίο ψηφίο είναι 1.

- ✓ Για τον αριθμό $A_2 = 2018^{2019}$ το τελευταίο ψηφίο διαδοχικών δυνάμεων του με εκθέτη 1,2,3,4, … κτλ είναι : $8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, \ldots$ κτλ.

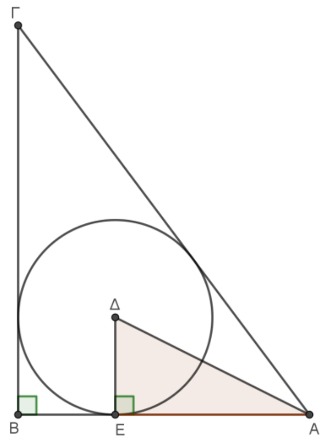
  Δηλαδή έχουμε μια επανάληψη των ψηφίων $8, 4, 2, 6$.

  Στην διαίρεση $2019 \div 4$ έχουμε πηλίκο 504 και υπόλοιπο 3. Δηλαδή θα έχουμε σε όλες τις διαδοχικές δυνάμεις από το 1 ως το 2019 504 επαναλήψεις της 4άδας 8,4,2,6 ως τελευταίο ψηφίο και αφού το υπόλοιπο είναι 3, τότε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού A_2 θα είναι το 2. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος των A_1 και A_2 θα είναι το $1 + 2 = 3$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $\left(\hat{B} = 90^{\circ}\right)$ το οποίο έχει πλευρές με μήκη $ΑΒ = 3$, $ΒΓ = 4$ και $ΑΓ = 5$. Οι πλευρές του τριγώνου εφάπτονται κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $Δ$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η $ΔΕ$ είναι κάθετη στην πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο επαφής του κύκλου με την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$



Προτεινόμενη Υπόδειξη-Λύση

Χωρίζουμε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ σε τρία τρίγωνα: Στο $ΒΓΔ, ΑΓΔ$ και $ΑΒΔ$. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τότε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ακτίνας ρ του κύκλου. Καταρχήν,

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 = E_{ΒΓΔ} + E_{ΑΒΔ} + E_{ΑΓΔ}.$$

Δηλαδή,

$$6 = \frac{4 \cdot \rho}{2} + \frac{3 \cdot \rho}{2} + \frac{5 \cdot \rho}{2} \Longrightarrow 6 = 6\rho \Longrightarrow \rho = 1.$$

Έτσι, $ΑΕ = ΑΒ - ΒΕ = 3 - \rho = 3 - 1 = 2$ και $ΔΕ = \rho = 1$. Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι $E_{ΑΔΕ} = \frac{(ΑΕ)\cdot(ΔΕ)}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

Πρόβλημα 4

Ένας πελάτης πήρε σε μια τράπεζα 2018 κέρματα του ενός ευρώ και ζήτησε από τον ταμία της τράπεζας να του βάλει σε έντεκα σακούλια όλο το ποσό με μίαν απαίτηση: οποιοδήποτε ακέραιο ποσό ζητηθεί από το €1 ως το €2018, να μπορεί να το σχηματίσει δίνοντας κάποιο ή κάποια από τα σακούλια, με τα λεφτά που θα έχουν τοποθετηθεί, χωρίς να τα ανοίγει. Να βρείτε τρόπο, ώστε ο ταμίας να εκπληρώσει την επιθυμία του πελάτη.

Προτεινόμενη Υπόδειξη-Λύση

Αν ζητηθεί το ελάχιστο ποσό αυτό πρέπει να είναι το €1. Άρα σε ένα σακούλι πρέπει να τοποθετήσουμε ένα μόνο ευρώ. Στην συνέχεια, το επόμενο ποσό μπορεί να είναι το το €2. Άρα σε ένα 2ο σακούλι θα τοποθετήσουμε €2. Με τα δύο αυτά σακούλια μπορούμε να έχουμε τα ποσά €1, €2 και €3 = €1 + €2. Συνεχίζοντας την ίδια λογική στο επόμενο σακούλι θα βάλουμε €4 και γενικά έχουμε διαφορετικά σακούλια με τα ποσά:

$$€1, €2, €4, €8, €16, €32, €64, €128, €256, €512\ .$$

Ως εδώ τα σακούλια αθροίζουν σε 1023 ευρώ και στο τελευταίο σακούλι βάζουμε την διαφορά $2018 - 1023 = 995$ ευρώ. Έτσι με τα 11 αυτά σακούλια αθροίζουμε όλα τα ποσά από το €1 μέχρι και το 2018.

Παρατήρηση: Η πιο πάνω λύση δεν είναι η μοναδική.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Ο Γιάννης πώλησε το αυτοκίνητο του στον Κώστα με έκπτωση 10%. Στη συνέχεια ο Κώστας το πώλησε στον Αντρέα με έκπτωση 20%. Ο Αντρέας το πώλησε στον Δημήτρη με κέρδος 20% και ο Δημήτρης αφού το έφτιαξε λίγο και το περιποιήθηκε (χωρίς πρόσθετο κόστος) άρεσε στον Γιάννη που το είχε αρχικά και του το ζήτησε να το αγοράσει πίσω. Ο Δημήτρης το πώλησε τελικά στον Γιάννη προς €9504, έχοντας έτσι κέρδος 10%.

Ποια ήταν η αρχική αξία του αυτοκινήτου;

Προτεινόμενη Λύση

Αν η αρχική αξία του αυτοκινήτου είναι €x τότε ο Γιάννης το πωλεί στον Κώστα προς $\frac{90}{100}x$.
Ο Κώστας το πωλεί στον Αντρέα προς $\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100}$.
Ο Αντρέας το πωλεί στον Δημήτρη προς $\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100}$.
Ο Δημήτρης το πωλεί πίσω στον Γιάννη προς $\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{110}{100}$ το οποίο και ισούται με €9504
Έτσι

$$\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{110}{100} = 9504 \Longrightarrow \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{11}{10}x = 9504 \Longrightarrow \frac{594}{625}x = 9504 \Longrightarrow x = 9504 \div \frac{594}{625} \Longrightarrow x = 10000.$$

Πρόβλημα 2

(α) Να βρείτε 3 διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς ώστε κάθε ένας από αυτούς να διαιρεί το άθροισμα τους.

(β) Να βρείτε 8 διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς ώστε κάθε ένας από αυτούς να διαιρεί το άθροισμα τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Προτεινόμενη Λύση

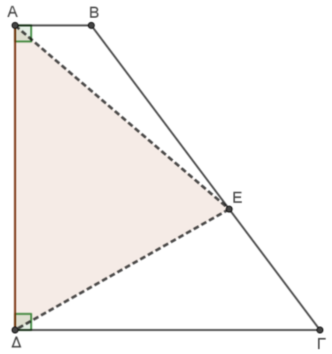
(α) Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους: Για παράδειγμα το 1,2,3

(β) Γενικά, αν έχω οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$ και ο καθένας τους διαιρεί το άθροισμα τους το οποίο είναι Σ, τότε και καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu, \Sigma$, θα διαιρεί το άθροισμα τους το οποίο είναι 2Σ.

Με βάση αυτή την παρατήρηση και αρχίζοντας από τους αριθμους 1,2,3 μπορούμε να βάζουμε ακόμη ένα αριθμό περισσότερο το οποίο και θα είναι το άθροισμα τους. Έτσι έχουμε, 1,2,3,6,12,24,48,96 κτλ.

Είναι φυσικό να υπάρχουν άπειρες λύσεις. Κάποιος μπορεί να ξεκινήσεις και με τους αριθμούς 2,4,6 και να συνεχίσει τοποθετώντας κάθε φορά το άθροισμα, όσων αριθμών τοποθετούμε κάθε φορά. Για παράδειγμα, 2,4,6,12,24,48,96,192 κτλ.

Πρόβλημα 3



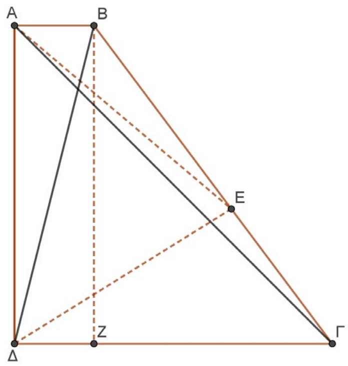
Δίνεται το ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB||\Gamma\Delta$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Δίνεται επίσης ότι $(AB) = 4, (A\Delta) = (\Delta\Gamma) = 16$ και $(BE) = 12$.

(α) Να δείξετε ότι $(\Gamma E) = 8$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $(A\Delta E)$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Από το B φέρουμε κάθετη BZ στην $\Gamma\Delta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $BZ\Gamma$ έχουμε:



$$(B\Gamma)^2 = (BZ)^2 + (Z\Gamma)^2 \Longrightarrow (B\Gamma)^2 = 16^2 + (16-4)^2 \Longrightarrow (B\Gamma)^2 = 400 \Longrightarrow B\Gamma = 20.$$

Άρα, $(\Gamma E) = (B\Gamma) - (BE) = 20 - 12 = 8$

(β) Φέρουμε την $A\Gamma$ και έχουμε: $E_{AB\Gamma} = \frac{4 \cdot 16}{2} = 32$ και $E_{ABE} = \frac{12}{20} \cdot E_{AB\Gamma} = \frac{12}{20} \cdot 32 = 19{,}2$

(γ) Φέρουμε την $B\Delta$ και έχουμε: $E_{\Delta B\Gamma} = \frac{16 \cdot 16}{2} = 128$ και $E_{\Gamma\Delta E} = \frac{8}{20} \cdot E_{B\Gamma\Delta} = \frac{8}{20} \cdot 128 = 51{,}2$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ θα είναι: $E_{A\Delta E} = E_{AB\Gamma\Delta} - (E_{ABE} + E_{\Gamma\Delta E})$.

$$E_{A\Delta E} = (4+16) \cdot \frac{16}{2} - (19{,}2 + 51{,}2) = 160 - 70{,}4 = 89{,}6$$

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους οι οποίοι είναι ίσοι με 25 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $N = \overline{\alpha_\nu \ldots . \alpha_2\alpha_1\alpha_0}$.

Τότε $N = \alpha_0 + 10\alpha_1 + 100\alpha_2 + \cdots + 10^{\nu-1}\alpha_\nu = 25(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu) \Longrightarrow$

$$24\alpha_0 + 15\alpha_1 = 75\alpha_2 + 975\alpha_3 + 9975\alpha_4 + \cdots$$

Επειδή τα ψηφία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$είναι ≤ 9 έχουμε,

$$24\alpha_0 + 15\alpha_1 \leq 24 \cdot 9 + 15 \cdot 9 = 39 \cdot 9 < 360$$

Επομένως $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \cdots = 0$.

Άρα, $24\alpha_0 + 15\alpha_1 = 75\alpha_2 \Longrightarrow 8\alpha_0 + 5\alpha_1 = 25\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_0$ διαιρεί το 5.

Αν $\alpha_0 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 5\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 5$ και έτσι $N = 150$.

Αν $\alpha_0 = 5 \Longrightarrow 8 + \alpha_1 = 5\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_2 = 2, \alpha_1 = 2$, ή $\alpha_2 = 3, \alpha_1 = 7$και έτσι $N = 225$ ή $N = 375$.

Δηλαδή όλοι οι αριθμοί είναι : $N = 150, 225$ και 375.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018** **Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ** *<u>Ημερομηνία</u>: 08/12/2018* *<u>Ώρα Εξέτασης</u>: 09:30-12:30*

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ:</u>

1. Να λύσετε <u>όλα</u> τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

Πρόβλημα 1

(α) Να δείξετε ότι ο $A=\sqrt{342225}+\sqrt[3]{74088}$ είναι φυσικός αριθμός τον οποίο και να υπολογίσετε.

(β) Να δείξετε ότι ο αριθμός $B=\sqrt{17-6\sqrt{8}}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\kappa+\lambda\sqrt{2}$ για κατάλληλες τιμές ακεραίων κ,λ**.**

Προτεινόμενες Λύσεις:

(α) Αναλύοντας σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 342225 και 74088 έχουμε:

$$342225=3^4\cdot5^2\cdot13^2 \text{ και } 74088=2^3\cdot3^3\cdot7^3$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\sqrt{342225}+\sqrt[3]{74088}=\sqrt{3^4\cdot5^2\cdot13^2}+\sqrt[3]{2^3\cdot3^3\cdot7^3}\\&=\sqrt{(3^2)^2\cdot(5)^2\cdot(13)^2}+\sqrt[3]{2^3\cdot3^3\cdot7^3}=9\cdot5\cdot13+2\cdot3\cdot7=585+42\\&=627\end{aligned}$$

(β) $B=\sqrt{17-6\sqrt{8}}=\sqrt{17-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=\sqrt{3^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=$

$$=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}=3-2\sqrt{2}$$

αφού $3-2\sqrt{2}>0$. Άρα $\kappa=3$, $\lambda=-2$.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) έτσι ώστε να ισχύει:

$$x^2-2xy-8y^2=40$$

Προτεινόμενες Λύσεις:

Με συμπλήρωση τέλειου τετραγώνου έχουμε,

$$x^2-2xy-8y^2=40\Rightarrow(x-y)^2-9y^2=40\Rightarrow(x-y-3y)(x-y+3y)=40\Rightarrow$$
$$(x-4y)(x+2y)=40$$

Αφού $x,y>0$ και $x-4y<x+2y$ έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\begin{cases} x-4y=1 \\ x+2y=40 \end{cases} \Rightarrow 6y=39 \Rightarrow y=\frac{13}{2} \notin \mathbb{N}$ (*απορρίπτεται*)
- $\begin{cases} x-4y=2 \\ x+2y=20 \end{cases} \Rightarrow 6y=18 \Rightarrow y=3, x=14$ (*δεκτή λύση*)
- $\begin{cases} x-4y=4 \\ x+2y=10 \end{cases} \Rightarrow 6y=6 \Rightarrow y=1, x=8$ (*δεκτή λύση*)
- $\begin{cases} x-4y=5 \\ x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow 6y=3 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ (*απορρίπτεται*)

Επομένως τα ζεύγη θετικών λύσεων της εξίσωσης είναι: $(14,3)$ *και* $(8,1)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και σημεία $Ε, Ζ$ στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα ώστε $(ΑΕ)=3(ΕΒ)$ και $(ΒΖ)=(ΓΖ)$. Να δείξετε ότι η $ΔΖ$ διχοτομεί την γωνία $ΕΔΓ$.

Προτεινόμενη Λύση

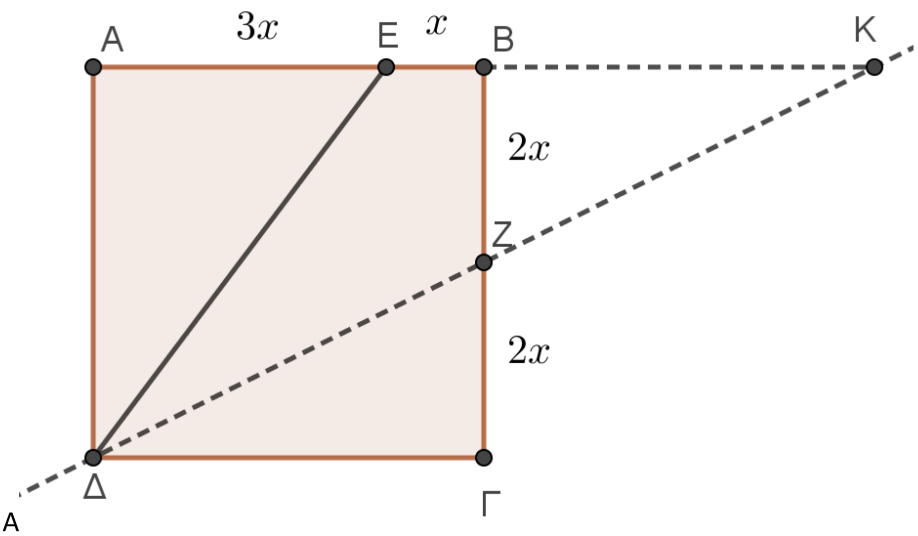
Προεκτείνουμε τις ευθείες $ΔΖ$ και $ΑΒ$ οι οποίες τέμνονται στο $Κ$. Για να δείξουμε ότι η $ΔΖ$ διχοτομεί τη γωνία $ΕΔΓ$ αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $ΖΔΓ$ και $ΕΔΖ$ είναι ίσες. Επειδή οι γωνίες $ΒΚΖ$ και $ΖΔΓ$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών $ΑΚ$ και $ΓΔ$ αρκεί να δείξουμε ότι $ΕΚ=ΕΔ$. Έστω $ΒΕ=x$ και $ΑΕ=3x$. Έχουμε $ΒΚ=ΓΔ=4x$ (λόγω συμμετρίας, αφού $Ζ$ μέσο της $ΒΓ$ ή διότι τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΖΚ$ και $ΓΔΖ$ είναι ίσα μεταξύ τους).

Έχουμε $ΕΚ=ΕΒ+ΒΚ=x+4x=5x$.

Το $ΕΔ$ το υπολογίζουμε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΕ$. Έτσι

$$ΕΔ=\sqrt{(3x)^2+(4x)^2}=\sqrt{9x^2+16x^2}=\sqrt{25x^2}=5x.$$

Επομένως $ΕΚ=ΕΔ$.



Πρόβλημα 4

(α) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}=\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2018\sqrt{2019}+2019\sqrt{2018}}$$

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2017\sqrt{2019}+2019\sqrt{2017}}$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) $\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}=\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{\nu}}=\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{\nu}}\cdot\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}=\frac{\nu+1-\nu}{(\nu+1)\sqrt{\nu}-\nu\sqrt{\nu+1}}=\frac{1}{(\nu+1)\sqrt{\nu}-\nu\sqrt{\nu+1}}$

(β) Για τον υπολογισμό του A χρησιμοποιούμε το πιο πάνω αποτέλεσμα και έχουμε,

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2018\sqrt{2019}+2019\sqrt{2018}}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2018}}-\frac{1}{\sqrt{2019}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2019}}$$

(γ) Όπως και στο (α) ερώτημα έχουμε με όμοιο τρόπο ότι,

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+2}}=\frac{\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+2}\sqrt{\nu}}=\frac{\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+2}\sqrt{\nu}}\cdot\frac{\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+2}-\sqrt{\nu}}=\frac{\nu+2-\nu}{(\nu+2)\sqrt{\nu}-\nu\sqrt{\nu+2}}$$
$$=\frac{2}{(\nu+2)\sqrt{\nu}-\nu\sqrt{\nu+2}}$$

Έτσι για τον υπολογισμό του B έχουμε,

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2017\sqrt{2019}+2019\sqrt{2017}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2017}}-\frac{1}{\sqrt{2019}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2019}}\right)$$